

УДК: 517.956

DOI: 10.65599/III1664

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ЧЕТЫРЁХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

М.А. Джабборов

Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими

В работе исследован класс нелинейных систем четырёх дифференциальных уравнений в пространстве x, y, z . С помощью замены производной неизвестной функции в правой части, а также равенства смешанных производных первых двух уравнений и последних двух уравнений системы, появляются новые уравнения. На основе полученных новых уравнений данная система будет преобразована в квазисистему. В очередной замены система будет более полной и вставится задача с начальными данными. В частности к системе в полных дифференциалах.

Ключевые слова: условия совместности, система в полных дифференциалах, переопределённые системы, многообразия решений.

ДАР БОРАИ ЯК СИСТЕМАИ ЧОР МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНЦИАЛИИ ДУ НОМАЪЛУМА ДАР ФАЗО

М.А. Ҷабборов

Дар қор як синфи системаҳои ғайрихаттии чормуодилатори муодилаҳои дифференсиали дар фазои x, y, z тадқиқ шудааст. Тавассути ивази ҳосилаи функсияи номаълуми дар тарафи рост буда, инчунин баробарии ҳосилаҳои омехтаи ду муодилаҳои аввал ва ду муодилаҳои охири система муодилаҳои нав пайдо мегарданд. Дар асоси муодилаҳои нави ҳосилшуда, системаи додашуда ба квазисистема оварда мешавад. Пас аз гузориши навбатӣ система пурратар гардида, масъала бо шартҳои ибтидоӣ гузошта мешавад. Дар ҳолати хусусӣ ба системаи муодилаҳо дар дифференсиали пурра ифода мегардад.

Калидвожаҳо: шартҳои ҳамҷоягӣ, системаҳо дар дифференсиали пурра, системаҳои барзиёдмуайянишуда, ҳалҳои бисёршакла.

ON A NONLINEAR SYSTEM OF FOUR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO UNKNOWN IN SPACE

M.A. Jabborov

The paper investigates a class of nonlinear systems of four differential equations in the space x, y, z . By replacing the derivative of an unknown function on the right side and equalizing the mixed derivatives of the first two equations and the last two equations of the system, new equations appear. Based on the new equations obtained this system will be transformed into a quasi-system. The next time system is replaced, it will be more complete and a task with initial data will be inserted. In particular, to the system in full differentials.

Keywords: the condition of jointness, the system of total differential, overrides the system, the diversity of solutions.

Введение

В статье исследован один класс нелинейных систем с двумя неизвестными функциями в трехмерном пространстве. Получены явные условия совместности, обеспечивающие однозначную разрешимость задач с четырьмя произвольными постоянными и одной произвольной функцией $\varphi(z)$. В другом частном случае доказано существование многообразия решения, содержащего четыре произвольные постоянные. В ходе исследования использованы работы [1]-[5].

Исследование системы

Пусть дана система

$$u_x, u_y, v_x, v_y = f^i(x, y, z; u, v, w, u_z), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

где областью существования функций f^i являются

$$P(a, b): |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq a, \quad |z - z_0| \leq a, \quad |u - u_0| \leq b, \\ |w - w_0| \leq b, \quad |v - v_0| \leq b.$$

Осуществляем замену $u_z = r(x, y, z)$ и проделаем операцию перекрестного дифференцирования (о.п.д.) относительно двух первых и двух последних уравнений системы (1). В результате получим следующее:

$$\begin{aligned} & f_{w}^2 \cdot w_x - f_{w}^1 \cdot w_y + f_r^2 \cdot r_x - f_r^1 \cdot r_y = \\ & = f_y^1 - f_x^2 + f_u^1 \cdot f^2 - f_u^2 \cdot f^1 + f_v^1 \cdot f^4 - f_v^2 \cdot f^3 \equiv \mathcal{H}_1, \\ & f_{w}^4 \cdot w_x - f_{w}^3 \cdot w_y + f_r^4 \cdot r_x - f_r^3 \cdot r_y = \\ & = f_y^3 - f_x^4 + f_u^3 \cdot f^2 - f_u^4 \cdot f^1 + f_v^3 \cdot f^4 - f_v^4 \cdot f^3 \equiv \mathcal{H}_2. \end{aligned} \quad (2)$$

При выполнении условий

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} f_{wv}^2 & -f_{wv}^1 \\ f_{wv}^4 & -f_{wv}^3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} f_{wv}^2 & f_r^2 \\ f_{wv}^4 & f_r^4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{wv}^2 & -f_r^1 \\ f_{wv}^4 & -f_r^3 \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} -f_{wv}^1 & f_r^2 \\ -f_{wv}^3 & f_r^4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -f_{wv}^1 & -f_r^1 \\ -f_{wv}^3 & -f_r^3 \end{vmatrix} = 0,$$

находим w_x и w_y :

$$w_x, w_y = f^j(x, y, z; u, v, w, r), \quad j = 5, 6$$

$$f_r^2 \cdot r_x - f_r^1 \cdot r_y = 0 \quad (\text{или } f_r^4 \cdot r_x - f_r^3 \cdot r_y = 0), \quad (4)$$

где

$$f^5 = \frac{1}{\Delta^{(1)}} (f_{wv}^1 \mathcal{H}_2 - f_{wv}^3 \mathcal{H}_1), \quad f^6 = \frac{1}{\Delta^{(1)}} (f_{wv}^2 \mathcal{H}_2 - f_{wv}^4 \mathcal{H}_1). \quad (5)$$

С учетом равенства $w_{xy} = w_{yx}$ получаем уравнение:

$$f_r^6 r_x - f_r^5 r_y = f_x^6 - f_y^5 + f_u^1 \cdot f^1 - f_u^5 \cdot f^2 + f_v^6 \cdot f^3 - f_v^5 \cdot f^4 + f_w^6 \cdot f^5 - f_w^5 \cdot f^6 \equiv \mathcal{H}_3. \quad (6)$$

Из уравнений (42) и (6) в случае $f_r^1 \cdot f_r^6 - f_r^2 \cdot f_r^5 \neq 0$ находим следующее уравнение:

$$r_x, r_y = f^k(x, y, z; u, v, w, r), \quad k = 7, 8, \quad (7)$$

где

$$(f_r^1 \cdot f_r^6 - f_r^2 \cdot f_r^5) \cdot r_x = \mathcal{H}_3 \cdot f_r^1, \quad (f_r^1 \cdot f_r^6 - f_r^2 \cdot f_r^5) \cdot r_y = \mathcal{H}_3 \cdot f_r^2. \quad (8)$$

Подставляя найденные значения r_x и r_y в (1), получим квазилинейную систему

$$u_x, u_y, v_x, v_y = f^i(x, y, z; u, v, w, r), \quad i = \overline{1, 4} \quad (9)$$

Теперь сделаем равенство смешанных производных $u_{xz} = u_{zx}$ и $u_{yz} = u_{zy}$, которое дают уравнения:

$$f_v^1 \cdot v_z + f_w^1 \cdot w_z = f^7 - f_z^1 - f_u^1 \cdot r - f_r^1 \cdot r_z, \quad (10)$$

$$f_v^2 \cdot v_z + f_w^2 \cdot w_z = f^8 - f_z^2 - f_u^2 \cdot r - f_r^2 \cdot r_z.$$

В дальнейшем предполагая

$$\Delta^{(2)} \equiv f_v^1 \cdot f_w^2 - f_v^2 \cdot f_w^1 \neq 0,$$

из (9) алгебраически находим v_z и w_z через новую неизвестную функцию $r_z = \mu(x, y, z)$.

Тогда при $\Delta^{(2)} \neq 0$ находим

$$v_z, w_z = f^k(x, y, z; u, v, w, r, \mu), \quad k = 9, 10, \quad (11)$$

где

$$\Delta^{(2)} \cdot f^9 = f_w^2 \cdot f^7 - f_w^1 \cdot f^8 - f_z^2 \cdot f_z^1 + f_v^1 \cdot f_z^2 + (f_w^1 \cdot f_u^2 - f_w^2 \cdot f_u^1) \cdot r +$$

$$+ (f_w^1 \cdot f_r^2 - f_w^2 \cdot f_r^1) \cdot \mu,$$

$$\Delta^{(2)} \cdot f^{10} = f_v^1 \cdot f^8 - f_v^2 \cdot f^7 - f_z^1 \cdot f_z^2 + f_v^2 \cdot f_z^1 + (f_v^2 \cdot f_u^1 - f_v^1 \cdot f_u^2) \cdot r +$$

$$+ (f_v^2 \cdot f_r^1 - f_v^1 \cdot f_r^2) \cdot \mu. \quad (12)$$

Принятое обозначение $r_z = \mu(x, y, z)$ и уравнения (7) дают возможность перекрестным дифференцированием найти два новых уравнения

$$\mu_x, \mu_y = f^l(x, y, z; u, v, w, r, \mu), \quad l = 11, 12, \quad (13)$$

где

$$f^{11} = f_z^7 + f_u^7 \cdot r + f_v^7 \cdot f^9 + f_w^7 \cdot f^{10} - f_r^7 \cdot \mu,$$

$$f^{12} = f_z^8 + f_u^8 \cdot r + f_v^8 \cdot f^9 + f_w^8 \cdot f^{10} - f_r^8 \cdot \mu. \quad (14)$$

Таким образом, производим систему уравнений, не являющейся системой в полных дифференциалах:

$$\begin{aligned} u_x, u_y, v_x, v_y &= f^i(x, y, z; u, v, w, r), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad u_z = r(x, y, z), \\ w_x, w_y, r_x, r_y &= f^j(x, y, z; u, v, w, r), \quad j = 5, 6, 7, 8, \\ v_z, w_z, \mu_x, \mu_y &= f^k(x, y, z; u, v, w, r, \mu), \quad k = 9, 10, 11, 12, \quad r_z = \mu(x, y, z). \end{aligned} \quad (15)$$

В случае относительно u, v, w, r, μ , выполнения условий:

$$\begin{aligned} f_z^3 - f_x^9 + f_u^3 \cdot r - f_u^9 \cdot f^1 + f_v^3 \cdot f^9 - f_v^9 \cdot f^3 + f_w^3 \cdot f^{10} - f_w^9 \cdot f^5 + \\ + f_r^3 \cdot \mu - f_r^9 \cdot f^7 - f_\mu^9 \cdot f^{11} &= 0, \\ f_z^4 - f_y^9 + f_u^4 \cdot r - f_u^9 \cdot f^2 + f_v^4 \cdot f^9 - f_v^9 \cdot f^4 + f_w^4 \cdot f^{10} - f_w^9 \cdot f^6 + \\ + f_r^4 \cdot \mu - f_r^9 \cdot f^8 - f_\mu^9 \cdot f^{12} &= 0, \\ f_z^5 - f_x^{10} + f_u^5 \cdot r - f_u^{10} \cdot f^1 + f_v^5 \cdot f^9 - f_v^{10} \cdot f^3 + f_w^5 \cdot f^{10} - f_w^{10} \cdot f^5 + \\ + f_r^5 \cdot \mu - f_r^{10} \cdot f^7 - f_\mu^{10} \cdot f^{11} &= 0, \\ f_z^6 - f_y^{10} + f_u^6 \cdot r - f_u^{10} \cdot f^2 + f_v^6 \cdot f^9 - f_v^{10} \cdot f^4 + f_w^6 \cdot f^{10} - f_w^{10} \cdot f^6 + \\ + f_r^6 \cdot \mu - f_r^{10} \cdot f^8 - f_\mu^{10} \cdot f^{12} &= 0, \\ f_z^7 - f_x^8 + f_u^7 \cdot f^2 - f_u^8 \cdot f^1 + f_v^7 \cdot f^4 - f_v^8 \cdot f^3 + f_w^7 \cdot f^6 - f_w^8 \cdot f^5 + \\ + f_r^7 \cdot f^8 - f_r^8 \cdot f^7 - f_\mu^8 \cdot f^{11} &= 0, \\ f_z^{11} - f_x^{12} + f_u^{11} \cdot f^2 - f_u^{12} \cdot f^1 + f_v^{11} \cdot f^4 - f_v^{12} \cdot f^3 + f_w^{11} \cdot f^6 - f_w^{12} \cdot f^5 + \\ + f_r^{11} \cdot f^8 - f_r^{12} \cdot f^7 + f_\mu^{11} \cdot f^{12} - f_\mu^{12} \cdot f^{11} &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

для системы (15) задача с начальными данными ставится в виде:

$$[u]_0 = C_1, \quad [v]_0 = C_2, \quad [w]_0 = C_3, \quad [r]_0 = C_4, \quad [\mu]_{x=x_0, y=y_0} = \varphi(z),$$

которые по отношению к системе (1) преобразуются в задачу:

$$[u]_0 = C_1, \quad [v]_0 = C_2, \quad [w]_0 = C_3, \quad [u_z]_0 = C_4, \quad [u_{zz}]_{x=x_0, y=y_0} = \varphi(z) \quad (17)$$

Теорема 1.

Пусть в системе (1) $f^i, i = \overline{1, 4}, w \in C^3(\Pi), u, v \in C^2(\Pi), \Delta^{(1)} \neq 0, f_w^2 \cdot f_r^4 - f_w^4 \cdot f_r^2 = 0, f_w^4 \cdot f_r^1 - f_w^2 \cdot f_r^3 = 0, f_w^3 \cdot f_r^2 - f_w^1 \cdot f_r^4 = 0, f_w^1 \cdot f_r^3 - f_w^3 \cdot f_r^1 = 0, f_r^1 \cdot f_r^6 - f_r^2 \cdot f_r^5 \neq 0$ и $\Delta^{(2)} \neq 0$. Если выполняются все условия (15) и $\alpha < \min\left(a; \frac{\ell}{M}\right), M = \max|f^i|$, то на $\Pi(a, \ell)$ задача (1) (17) разрешима однозначно.

Случай $\Delta^{(2)} \equiv 0$. В этом случае из уравнения (10) получаем:

$$r_z = f^{9*}(x, y, z; u, v, w, r), \quad (18)$$

где

$$(f_w^1 \cdot f_r^2 - f_w^2 \cdot f_r^1) f^{9*} = f_w^1 (f^8 - f_z^2 - f_u^2 \cdot r) - f_w^2 (f^7 - f_z^1 - f_u^1 \cdot r). \quad (19)$$

Операция перекрестного дифференцирования для (7) и (18) при

$\Delta^{(3)} = f_v^7 \cdot f_w^8 - f_w^7 \cdot f_v^8 \neq 0$ приводит к двум уравнениям:

$$v_z, w_z = f^{k*}(x, y, z; u, v, w, r), \quad k = 10, 11, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta^{(3)}f^{10*} &= f_{w}^8(f_x^{9*} - f_z^7 + f_u^{9*} \cdot f^1 - f_u^7 \cdot r + f_v^{9*} \cdot f^3 - f_r^7 \cdot f^{9*} + f_w^{9*} \cdot f^5 + f_r^{9*} \cdot f^7) - \\ &\quad - f_w^7(f_y^{9*} - f_z^8 + f_u^{9*} \cdot f^2 - f_u^8 \cdot r + f_v^{9*} \cdot f^4 - f_r^8 \cdot f^{9*} + f_w^{9*} \cdot f^6 + f_r^{9*} \cdot f^8), \\ \Delta^{(3)}f^{11*} &= f_v^7(f_y^{9*} - f_z^8 + f_u^{9*} \cdot f^2 - f_u^8 \cdot r + f_v^{9*} \cdot f^4 - f_r^8 \cdot f^{9*} + f_w^{9*} \cdot f^6 + f_r^{9*} \cdot f^8) - \\ &\quad - f_v^8(f_x^{9*} - f_z^7 + f_u^{9*} \cdot f^1 - f_u^7 \cdot r + f_v^{9*} \cdot f^3 - f_r^7 \cdot f^{9*} + f_w^{9*} \cdot f^5 + f_r^{9*} \cdot f^7).\end{aligned}\quad (21)$$

На основе этого преимущества приходим к п.д.-системе относительно u, v, w, r :

$$\begin{cases} u_x, u_y, v_x, v_y, w_x, w_y, r_x, r_y = f^i(x, y, z; u, v, w, r), \quad i = \overline{1,8}, \\ u_z = r, \quad r_z, v_z, w_z = f^{j*}(x, y, z; u, v, w, r), \quad j = \overline{9,11}, \end{cases}\quad (22)$$

где условиями совместности будут:

$$\begin{aligned}f_z^1 - f^7 + f_u^1 \cdot r + f_v^1 \cdot f^{10*} + f_w^1 \cdot f^{11*} + f_r^1 \cdot f^{9*} &= 0, \\ f_z^2 - f^8 + f_u^2 \cdot r + f_v^2 \cdot f^{10*} + f_w^2 \cdot f^{11*} + f_r^2 \cdot f^{9*} &= 0, \\ f_z^3 - f_x^{10*} + f_u^3 \cdot r - f_u^{10*} \cdot f^1 + f_v^3 \cdot f^{10*} - f_v^{10*} \cdot f^3 + f_w^3 \cdot f^{11*} - \\ &\quad - f_w^{10*} \cdot f^5 + f_r^3 \cdot f^{9*} - f_r^{10*} \cdot f^{9*} = 0, \\ f_z^4 - f_y^{10*} + f_u^4 \cdot r - f_u^{10*} \cdot f^2 + f_v^4 \cdot f^{10*} - f_v^{10*} \cdot f^4 + f_w^4 \cdot f^{11*} - \\ &\quad - f_w^{10*} \cdot f^6 + f_r^4 \cdot f^{9*} - f_r^{10*} \cdot f^8 = 0, \\ f_z^5 + f_u^5 \cdot r + f_v^5 \cdot f^{10*} + f_w^5 \cdot f^{11*} + f_r^5 \cdot f^{9*} - f_x^{11*} - f_u^{11*} \cdot f^1 - \\ &\quad - f_v^{11*} \cdot f^3 - f_w^{11*} \cdot f^5 - f_r^{11*} \cdot f^7 = 0, \\ f_z^6 + f_u^6 \cdot r + f_v^6 \cdot f^{10*} + f_w^6 \cdot f^{11*} + f_r^6 \cdot f^{9*} - f_y^{11*} - f_u^{11*} \cdot f^2 - \\ &\quad - f_v^{11*} \cdot f^4 - f_w^{11*} \cdot f^6 - f_r^{11*} \cdot f^8 = 0, \\ f_z^7 + f_u^7 \cdot r + f_v^7 \cdot f^{10*} + f_w^7 \cdot f^{11*} + f_r^7 \cdot f^{9*} - f_x^{9*} - f_u^{9*} \cdot f^1 - \\ &\quad - f_v^{9*} \cdot f^3 - f_w^{9*} \cdot f^5 - f_r^{9*} \cdot f^7 = 0, \\ f_z^8 + f_u^8 \cdot r + f_v^8 \cdot f^{10*} + f_w^8 \cdot f^{11*} + f_r^8 \cdot f^{9*} - f_y^{9*} - f_u^{9*} \cdot f^2 - \\ &\quad - f_v^{9*} \cdot f^4 - f_w^{9*} \cdot f^6 - f_r^{9*} \cdot f^8 = 0.\end{aligned}\quad (23)$$

Известно, что система (22) получена при некоторых равносильных преобразованиях из (1). Тогда задача для первоначальной системы ставится в виде:

$$[u]_0 = C_1, \quad [v]_0 = C_2, \quad [w]_0 = C_3, \quad [u_z]_0 = C_4. \quad (24)$$

Теорема 2. Пусть в системе (1) $f^i, i = \overline{1,4}, w \in \mathcal{C}^3(\Pi), u, v \in \mathcal{C}^2(\Pi), \Delta^{(1)} \neq 0, f_w^2 \cdot f_r^4 - f_w^4 \cdot f_r^2 = 0, f_{wv}^4 \cdot f_r^1 - f_w^2 \cdot f_r^3 = 0, f_{wv}^3 \cdot f_r^2 - f_w^1 \cdot f_r^4 = 0, f_{wv}^1 \cdot f_r^3 - f_w^3 \cdot f_r^1 = 0, f_r^1 \cdot f_r^6 - f_r^2 \cdot f_r^5 \neq 0$ и $\Delta^{(2)} = 0$. Если выполняются все условия совместности (23), $\alpha < \min\left(a; \frac{\delta}{M}\right), \mathcal{M} = \max|f^i|$, то на $\Pi(a, \delta)$ задача (1) (23) разрешима единственным образом.

Рецензент: Камариддинзода З.Н. – к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой алгебры и теории исел ПИТУУ имени Садриддина Айни.

Литература

1. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. - Душанбе: Дониш, 1986, 116с.

2. Михайлов Л.Г., Пиров Р. О некоторых переопределенных системах уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями.- Докл. АН ТаджССР, 1981, т.24, №2
3. Пиров Р. Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых классов переопределенных систем уравнений в частных производных с несколькими неизвестными функциями: Автореф. дисс.... д.физ.-мат.н.- Душанбе, 2018, 50 с.
4. Пиров Р. О некоторых системах четырёх уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями от трёх переменных. – Доклады АН Таджикской ССР, 1987, т.30, №3, с.145-149.
5. Пиров, Р. Исследование одного класса нелинейных переопределенных систем четырёх дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями в пространстве / Р. Пиров, М. М. Джабаров // Политехнический вестник. Серия: Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2022. – № 1(57). – С. 4-6. – EDN YUKCGY.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ – МАЪЛУМОТ ДАР БОРАИ МУАЛЛИФ – INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

TJ	RU	EN
Чаббаров Мустафо Абдурозикович	Джабаров Мустафо Абдурозикович	Jabborov Mustafu Abdurozиковich
Ассистенти кафедраи математикаи оӣ	Ассистент кафедры “Высшая математика”	Assistant of the department of Higher mathematics
Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ	Таджикский технический университет имени академик М.С. Осими	Tajik technical university named after acad. M.S. Osimi
E-mail: Jabbor7@bk.ru		